15.3 Струны, оканчивающиеся на D-бранах

Мы узнали в секции 14.2, что на мировом объеме каждой D-браны существует Максвелловское поле. Действительно, фотонные состояния возникают из квантования открытых струн, чьи конечные точки лежат на D-бране. Квантование замкнутых струн в Разделе 13.3 привело к обнаружению состояний, возникающих из поля Калаби-Рамона $B_{\mu\nu}$, живущего во всем пространстве-времени. Мы уже видели, что струна электрически взаимодействует с полем $B_{\mu\nu}$. Возникает естественный вопрос: если D-браны имеют Максвелловские поля, существуют ли такие объекты, которые переносят электрический заряд этих полей? Эта загадка связана с другой: Что происходит с плотностью струнного заряда, - которая, как мы знаем, может быть представлена в виде тока, - когда струна оканчивается на D-бране? Нарушается ли при этом закон сохранения струнного заряда?

Задачи с сохранением заряда и в прошлом приводили к интересным выводам. Они привели, например, к пониманию тока смещения в электромагнитных процессах, зависящих от времени. В струнной теории решение задачи приводит к пониманию того, что концы открытой струны ведут себя как электрические точечные заряды! Они являются зарядами Максвелловского поля, существующего на D-бране, на которой заканчивается струна. Более того, электрические силовые линии этих точечных зарядов несут струнный заряд. Связь между струнным и электрическим зарядами и между соответствующими полями Калаби-Рамона и Максвелла приводит к сохранению струнного заряда.

Сохранение тока глубоко связано с калибровочной инвариантностью. В электромагнетизме взаимодействие калибровочного поля с током отображается членом в действии, который имеет форму

$$S_{coup} = \int d^D x A_\mu(x) j^\mu(x) \qquad (15.40)$$

В уравнении (15.2), например, член взаимодействия является средним членом в правой стороне уравнения. Калибровочные преобразования – это

$$\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \epsilon, \qquad (15.41)$$

А напряженность поля $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ калибровочно инвариантна: $\delta F_{\mu\nu} = 0$. Очевидно, что первый и последний члены в правой стороне уравнения (15.2) яляются калибровочно инвариантными. Следовательно, члены в действии, отличающиеся от (15.40) являются сами по себе калибровочно инвариантными. Тогда калибровочная инвариантность действия требует калибровочную инвариантность $\delta S_{coup} = 0$ взаимодействия (15.40). Предполагая, что ток j^μ сам по себе является калибровочно инвариантным,

$$\delta S_{coup} = \int d^D x \left(\partial_\mu \epsilon\right) j^\mu(x) = -\int d^D x \epsilon \partial_\mu j^\mu(x), \qquad (15.42)$$

где мы проинтегрировали по частям и установили граничные члены в ноль, предполагая, что параметр ϵ достаточно быстро исчезает на бесконечности. Теперь мы видим, что сохранение тока $\partial_\mu j^\mu = 0$ приводит к калибровочной инвариантности ($\delta S_{coup} = 0$).

Аналогичные идеи можно использовать при рассмотрении взаимодействия с полем Калаби-Рамона $B_{\mu\nu}$.

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu. \qquad (15.43)$$

Тотально антисимметричная напряженность поля $H_{\mu\nu\rho}$ (15.6) инвариантна при этих калибровочных преобразованиях. Как указано в правой стороне в (15.10), взаимодействие $B_{\mu\nu}$ с током $j^{\mu\nu}(= -j^{\nu\mu})$ имеет общую форму

$$-\int d^D x B_{\mu\nu}(x) j^{\mu\nu}(x). \qquad (15.44)$$

Быстрое вычисление 15.3 Докажите, что член взаимодействия (15.44) инвариантен при калибровочных преобразованиях (15.43), если $j^{\mu\nu}$ - сохраняемый ток.

Полученные выше результаты указывают на то, что мы можем изучать возможные нарушения сохранения тока фокусируя свое внимание на свойства калибровочной инвариантности действия. Поэтому давайте вновь рассмотрим член в действии (15.4), ответственный за взаимодействие струны с полем $B_{\mu\nu}$:

$$S_\beta = -\frac{1}{2}\int d\tau\; d\sigma \epsilon^{\alpha\beta}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu B_{\mu\nu}\big(X(\tau,\sigma)\big). \tag{15.45}$$

Здесь введены два размерных индекса, $\alpha, \beta = 0, 1$, а также $\partial_0 = \partial/\partial\tau$ и $\partial_0 = \partial/\partial\sigma$. Также, $\epsilon^{\alpha\beta}$ является тотально антисимметричным с $\epsilon^{01} = 1$.

Так как калибровочная инвариантность для S_β не очевидна, мы начнем с изучения более простого случая. Мы проверим калибровочную инвариантность члена, ответственного за взаимодействие точечной частицы с максвелловским полем:

$$q\int A_\mu(x)dx^\mu\ . \tag{15.46}$$

Почему он инвариантен при преобразованиях (15.41)? Используя параметр τ, изменяющийся от -∞ до +∞, мы видим, что вариация пропорциональна

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \delta A_\mu(x(\tau))\frac{dx^\mu}{d\tau} = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \frac{\partial\epsilon(x(\tau))}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} =$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \frac{\partial\epsilon\big(x(\tau)\big)}{\partial\tau} = \epsilon\big(x(\tau=\infty)\big) - \epsilon\big(x(\tau=-\infty)\big) \tag{15.47}$$

Так как τ параметризует время, $t(\tau\to\pm\infty) = \pm\infty$. Калибровочная инвариантность будет существовать, если мы предположим, что калибровочный параметр пропадает в бесконечном прошлом и в бесконечном будущем: $\epsilon(t = \pm\infty, \bar{x}) = 0.$

Давайте вернемся к нашей проблеме, калибровочной инвариантности действия (15.45). Так как аргументами $B_{\mu\nu}$ являются координаты струны, калибровочные преобразования принимают форму

$$\delta B_{\mu\nu}(X) = \frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial\Lambda_\mu}{\partial X^\nu}\,, \tag{15.48}$$

Где аргументами Λ также являются координаты струны $X(\tau,\sigma)$. Члены, на которые умножается $B_{\mu\nu}$ в (15.45), являются антисимметричными по μ и ν (проверьте это!). В результате, каждый член в (15.48) даёт один и тот же вклад в вариацию:

$$\delta S_B = -\int d\tau d\sigma \epsilon^{\alpha\beta}\frac{\partial\Lambda_\nu}{\partial X^\mu}\partial_\alpha X^\mu \partial_\beta X^\nu =$$
$$-\int d\tau d\sigma \epsilon^{\alpha\beta}\,\partial_\alpha\Lambda_\nu\,\partial_\beta X^\nu. \tag{15.49}$$

Выписывая все возможные члены, получаем:

$$\delta S_B = -\int d\tau d\sigma(\partial_\tau\Lambda_\nu\ \partial_\sigma X^\nu - \partial_\sigma\Lambda_\nu\partial_\tau X^\nu) =$$
$$-\int d\tau d\sigma(\partial_\tau(\Lambda_\nu\ \partial_\sigma X^\nu) - \partial_\sigma(\Lambda_\nu\partial_\tau X^\nu)). \tag{15.50}$$

Заметим, что мы имеем две общие производные. Член ∂_τ не дает вклада, так как мы можем предположить,что Λ пропадает в конечных точках времени. Если рассматриваемая струна замкнута, тогда нет границы по σ и член ∂_σ также не дает вклада. Это показывает калибровочную инвариантность для замкнутых струн.

Однако, для открытой струны член ∂_σ в (15.50) приводит к возникновению не пропадающих вкладов на границах. Мировой лист открытой струны имеет границы, которые проявляются как линии на мировом объеме D-браны (Рисунок 15.2). Давайте вычислим δS_B для открытых струн.

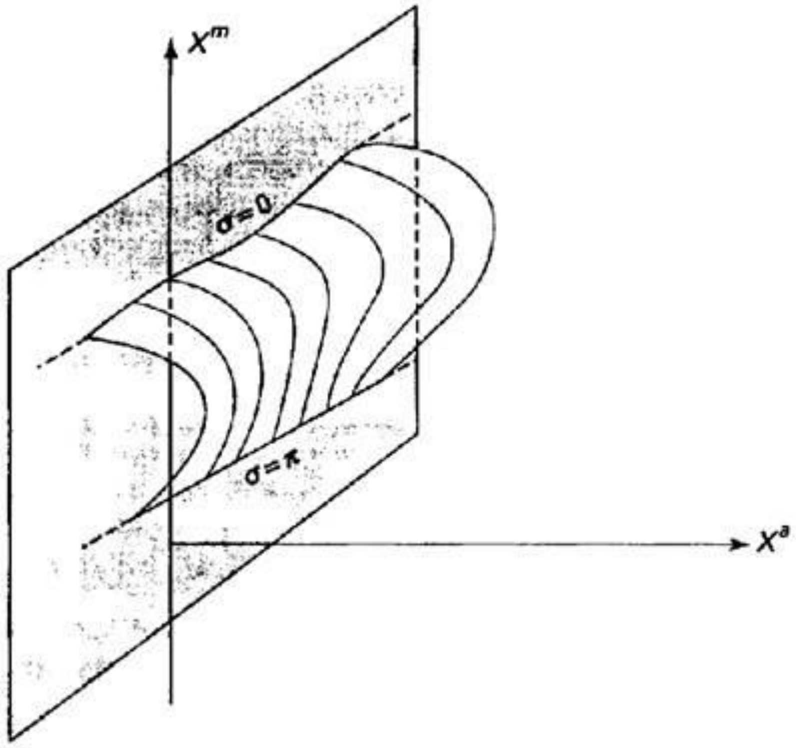

Рисунок 15.2
D-брана и мировой лист открытой струны. Границы мирового листа лежат на D-бране: они являются мировыми линиями конечных точек открытой струны, т. е. при σ = 0 и σ = π. X^m и X^a являются струнными координатами вдоль и поперек браны, соответственно.

Назовем струнные координаты вдоль браны X^m, а струнные координаты, нормальные к бране X^a:

$$X^\mu = (X^m, X^a), \mu=(m, a). \qquad (15.51)$$

Если D-брана есть D_p-брана, тогда $m = 0, 1,\ldots, p$. Мы отбрасываем член с ∂_τ в (15.50), исходя из ранее сказанного, и фокусируем свое внимание на

$$\delta S_B = \int d\tau d\sigma\, \partial_\sigma(\Lambda_\nu \partial_\tau X^\nu) = \int d\tau [\Lambda_m \partial_\tau X^m + \Lambda_a \partial_\tau X^a]_{\sigma=0}^{\sigma=\pi}. \qquad (15.52)$$

Так как X^a- это DD координаты, то $\partial_\tau X^a=0$ на обоих концах, и второй член выше не дает вклада. В результате

$$\delta S_B = \int d\tau\, \Lambda_m \partial_\tau X^m|_{\sigma=\pi} - \int d\tau\, \Lambda_m \partial_\tau X^m|_{\sigma=0}\ . \qquad (15.53)$$

Калибровочная инвариантность нарушается из-за этих двух граничных членов. Это показывает, что струнный заряд не сохраняется в конечных точках открытой струны. Мы должны восстановить калибровочную инвариантность. Как мы уже говорили, это требует добавление Максвелловских полей на бране в концах струны.

Поэтому, давайте добавим к струнному действию пару членов, которые задают электрический заряд на концах струны:

$$S = S_B + \int d\tau\, A_m(X)\frac{dX^m}{d\tau}\ \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau\, A_m(X)\frac{dX^m}{d\tau}\ \Big|_{\sigma=0}.$$

(15.54)

Так как члены выше имеют противоположные знаки, концы струны заряжены противоположными зарядами. Для удобства мы выбрали начало струны как отрицательно заряженное, а конец – положительно заряженную точку. Мы также установили заряды в конечных точках равными q = ±1, и мы будем и в дальнейшем поддерживаться этим соглашениям. Физическая напряженность зарядов может быть определена только если мы знаем нормализацию членов F^2 на D-бране. Эта нормализация фиксирована константой k_0^2 в (15.2). Члены F^2 вместе с взаимодействиями в (15.54) определяют то, как концы струны создают электромагнитные поля. Нормализация членов F^2 на D-бране вовлекает струнное взаимодействие и α'. Они будут определены в Разделе 20.3.

Короче, и в обозначениях (15.53), мы перепишем (15.54) как

$$S = S_B + \int d\tau\, A_m \partial_\tau X^m\ \Big|_{\sigma=\pi} - \int d\tau\, A_m \partial_\tau X^m\ \Big|_{\sigma=0}.$$

(15.55)

Как использовать эти члены для восстановления калибровочной инвариантности? Разрешив Максвелловскому полю изменяться при калибровочных преобразованиях поля $B_{\mu\nu}$! Это немного странно и удивительно, но без взаимной связи между двумя типами полей мы не можем разрешить нашу проблему калибровочной инвариантности.

Поэтому мы постулируем, что при всяком варьировании $B_{\mu\nu}$ с калибровочным параметром Λ_μ=(Λ_m, Λ_a), мы должны также варьировать Максвелловское поле A_m на D-бране:

$$\delta B_{\mu\nu} = \partial_\mu \Lambda_\nu - \partial_\nu \Lambda_\mu,$$
$$\delta A_m = -\Lambda_{\mathrm{m}} \qquad (15.56)$$

Если мы варьируем A_m указанным образом, то вариация последних двух членов в (15.55) уничтожает вариации, получаемые в (15.53), что приводит к восстановлению калибровочной инвариантности.

Разрешая варьирование A согласно (15.56), мы немедленно решаем проблему, но это приводит к возникновению некоторых интересных вопросов. Вместе с полным струнным действием, мы также хотим, чтобы и Максвелловское действие было бы калибровочно инвариантно. Так как это действие пропорционально F^2 , мы задаемся вопросом: F_{mn} калибровочно инвариантно? Нет, это не так! Действительно,

$\delta F_{mn} = \partial_m \delta A_n - \partial_n \delta A_m = -\partial_m \Lambda_n + \partial_n \Lambda_m = -\delta B_{mn}$, (15.57)

где в последнем шаге мы обнаружили, что вариация совпадает с калибровочным преобразованием B_{mn}. Это весьма важно, потому что отсюда следует, что полная калибровочная инвариантная комбинация есть

$\delta(F_{mn}+B_{mn}) = 0.$ (15.58)

Мы называем новую инвариантную величину $\ddot{o}_{mn}$:

$\ddot{o}_{mn} \equiv F_{mn}+B_{mn},\ \delta\ddot{o}_{mn} = 0.$ (15.59)

На D-бране $\ddot{o}_{mn}$ имеет физический смысл напряженности поля. Известная полевая напряженность F_{mn} не является полностью физической, потому что не является калибровочно инвариантной. Максвелловские уравнения должны быть модифицированы путем замены F на $\ddot{o}$. Во многих обстоятельствах это будет малой модификацией, а для нулевого B, $\ddot{o}$ равно F. Связь между этими полями позволяет нам интуитивно понять поведение струнного заряда, когда струнные концы лежат на D-бране. Сейчас мы это рассмотрим.

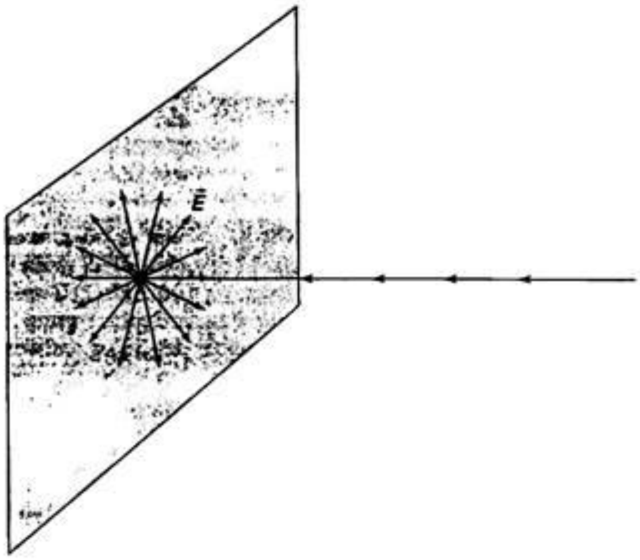

Рисунок 15.3
Концы струны лежат на D-бране. Плотность заряда, переносимого струной можно представить в виде тока, протекающего по струне. На D-бране этот ток несут электрические силовые линии.

Мы уже видели, что плотность струнного заряда можно представлять как некоторый тип тока, идущего вдоль струны. Предположим, что струнные концы лежат на D-бране, как показано на Рисунке 15.3. Ток не может остановиться притекая к концу струны, поэтому он должен течь на D-брану. Как это может произойти? Мы знаем, что конечная точка струны заряжена, поэтому электрические силовые линии возникают из нее распространяясь внутри D-браны. Силовые линии не могут выйти в окружающее пространство, так как Максвелловское поле живет только на D-бране. Мы увидим, что в действительности электрические силовые линии несут струнный заряд!
Как показывает уравнение (15.10), плотность заряда струны j^{0k} является по определению величиной, которая является парной к $B_{0к}$. Все,что является парным к $B_{0к}$, появляется на правой стороне в (15.14), как вклад в j^{0k}. На D-бране плотность Лагранжиана пропорциональна $-\tfrac{1}{4}ö^{mn}ö_{mn}$ - является калибровочно-инвариантным обобщением плотности Лагранжиана Максвелла. Раскрывая его, получаем

$$-\tfrac{1}{4}ö^{mn}ö_{mn} = -\tfrac{1}{4}B^{mn}B_{mn} - \tfrac{1}{4}F^{mn}F_{mn} - \tfrac{1}{2}F^{mn}B_{mn} \qquad (15.60)$$

Последний член выше особенно интересен. Мы можем раскрыть его далее как

$$-\tfrac{1}{2}F^{mn}B_{mn} = -F^{0k}B_{ok} + \ldots \qquad (15.61)$$

Полное действие для D-браны и струны будет включать член $F^{0k}B_{ok}$. Все, что является парным к $B_{0к}$, несет струнный заряд, поэтому F^{0k} представляет собой струнный заряд на бране. Но $F^{0k} = E_к$ - электрическое поле. Поэтому электрические силовые линии на D-бране несут струнный заряд.